Θεωρία Αριθμών:
1. Μιγαδικοί αριθμοί
2. Ακέραιοι

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Συμβολισμός: $\mathbb{R}$ = πραγματικοί αριθμοί

Ορισμός: Έστω i "σύμβολο". Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι το εξής:
$\mathbb{C} = \{a + bi \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$

π.χ. $3+\pi i \in \mathbb{R}$, $1+0i \in \mathbb{C}$ κτλ

Συμβολισμός: Αν $b=0$, αντί για $a+0i$, μπορούμε να γράψουμε a, (για $a\in\mathbb{R}$)

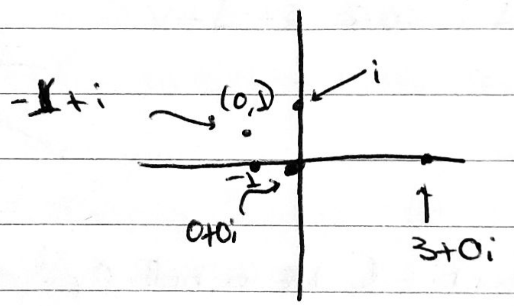
Αν $a=0$ κ' $b\in\mathbb{R}$, γράφουμε bi αντί για $0+bi$

Αν $b=1$ κ' $a\in\mathbb{R}$, γράφουμε $a+i$ αντί για $a+1i$

π.χ. Στο $\mathbb{C}$ $1+0i = 1$, $0+1i = i$

Ορισμός: Έστω $a+bi \in \mathbb{C}$ με $a,b\in\mathbb{R}$. Τότε το σημείο $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, δηλαδή το σημείο του επιπέδου με πρώτη συντεταγμένη a κ' δεύτερη συντεταγμένη b, λέγεται το σημείο του επιπέδου που αντιστοιχεί στον μιγαδικό $a+bi$

π.χ. Το $0+0i = 0 \in \mathbb{C}$ αντιστοιχεί στο $(0,0)$
$0+1i = i \in \mathbb{C}$ -//- $(0,1)$
$-1+1i = -1+i \in \mathbb{C}$ -//- $(-1,1)$
$3 = 3+0i \in \mathbb{C}$ -//- $(3,0)$



Αντίστροφα, το σημείο (a,b) του επιπέδου, αντιστοιχεί σε μοναδικό μιγαδικό, τον $a+bi$

Παρατήρηση: Από τον ορισμό του $\mathbb{C}$, αν $a,b,a',b'\in\mathbb{R}$, $a+bi = a'+b'i$ αν και μόνο αν $(a=a')$ κ' $(b=b')$

Πράξεις

Ορισμός: Έστω $a+bi\in\mathbb{C}$. Τότε το a λέγεται <u>ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ</u> του $a+bi$ κ' το b <u>ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ</u> του $a+bi$

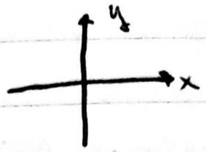
Από τα παραπάνω, κάθε μιγαδικός αριθμός καθορίζεται μονοσήμαντα από το πραγματικό κ' φανταστικό του μέρος

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ σαν υποσύνολο του $\mathbb{C}$ ως εξής:

Έστω $a\in\mathbb{R}$. Τότε ταυτίζουμε το a με τον μιγαδικό αριθμό $a+0i\in\mathbb{R}$

Συνεπώς, αν $z\in\mathbb{C}$, έχουμε $z\in\mathbb{R}$ αν κ' μόνον το φανταστικό μέρος του z είναι 0.

Ισοδύναμα, αν κ' μόνο αν το στοιχείο του επιπέδου που αντιστοιχεί στο z έχει δεύτερη συντεταγμένη 0, δηλαδή είναι στον άξονα x.



ΣΥΖΥΓΗΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ

Ορισμός: Έστω $z=a+bi\in\mathbb{C}$ με $a,b\in\mathbb{R}$

Ο συζυγής μιγαδικός $\bar{z}$ είναι ο εξής:

$\bar{z}=a+(-b)i\in\mathbb{C}$

π.χ. $\overline{(3+4i)}=3+(-4)i$, $\bar{5}=\overline{(5+0)}=5+(-0)i=5$

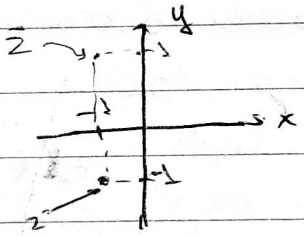
$\bar{i}=\overline{(0+1i)}=0+(-1)i=(-1)i=-i$.

Γεωμετρική σημασία

Έστω $z=a+bi\in\mathbb{C}$ με $a,b\in\mathbb{R}$.

Τότε $\bar{z}=a+(-b)i$. Γεωμετρικά το σημείο $(a,-b)$ του επιπέδου που αντιστοιχεί στο $\bar{z}$ προκύπτει από το σημείο (a,b) του επιπέδου που αντιστοιχεί στο z με ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟ στον άξονα των x.

π.χ. $z=-1+(-1)i$ τότε $\bar{z}=-1+i$



Ορισμός: Έστω $a+bi\in\mathbb{C}$ με $a,b\in\mathbb{R}$. Ορίζουμε ΜΕΤΡΟ $|z|$ του μιγαδικού αριθμό

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

π.χ. $z=i$, τότε $z=0+1i$ κ' $|z|=\sqrt{0^2+1^2}=1$

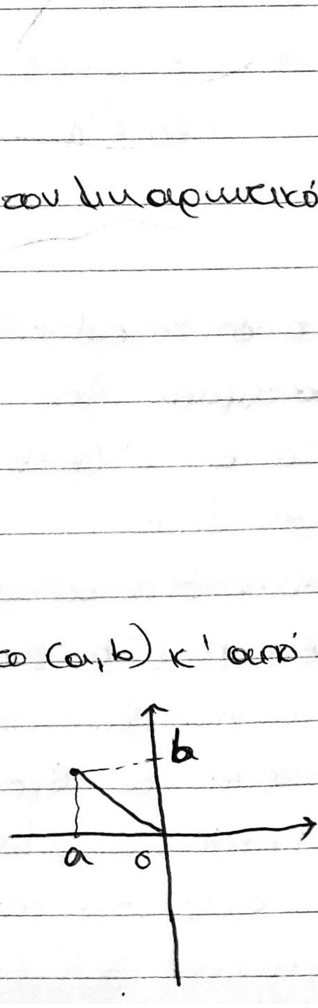
Αν $z=3+4i$, τότε $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

Γεωμετρική σημασία.

Έστω $z=a+bi\in\mathbb{C}$ με $a,b\in\mathbb{R}$

Τότε το σημείο του επιπέδου που αντιστοιχεί στο z είναι το (a,b) κ' από Π.Θ.

$|z|$ = η απόσταση του σημείου (a,b) από την αρχή των αξόνων.



Ορισμός: Έστω $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i\in\mathbb{C}$ με $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$. Ορίζουμε
$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i\in\mathbb{C}$
π.χ. $(4+(-3)i)+(-2+(-4)i)=(4-2)+(-3-4)i=2+(-7)i$

Παρατήρηση

Όπως είπαμε $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ κ' από τον ορισμό της πρόσθεσης στο $\mathbb{C}$ έχουμε ότι επεκτείνει τη γνωστή πρόσθεση στο $\mathbb{R}$, γιατί αν $a_1,a_2\in\mathbb{R}$
$a_1+a_2=(a_1+a_2)+0i=(a_1+0i)+(a_2+0i)$
Με άλλα λόγια ο περιορισμός στο $\mathbb{R}$ της πρόσθεσης στο $\mathbb{C}$ είναι η γνωστή πρόσθεση στο $\mathbb{R}$

ΓΙΝΟΜΕΝΟ

$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ: Επιμεριστική ιδιότητα
$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2i^2$
κ' χρήση $i^2=-1$
π.χ. $(3+i)(2-i)=6-3i+2i-\overset{(-1)}{i^2}=(6+1)+(-3+2)i=7+(-1)i$

Πρόταση $i^2=-1$

Απόδειξη: έχουμε $i=0+1i$. Άρα $a_1=a_2=0$, $b_1=b_2=1$ κ' από τον ορισμό το αποτέλεσμα έπεται
π.χ. $i(-1-i)=-i-i^2=-i-(-1)=1-i=1+(-1)i$

Πρόταση Η πρόσθεση + στο $\mathbb{C}$ έχει τις εξής ιδιότητες:
1) Προσεταιριστικότητα $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)\ \forall z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$
2) Μεταθετικότητα $z_1+z_2=z_2+z_1\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$
3) Ύπαρξη ουδετέρου. Έστω $0=0+0i$. Τότε $0+z=z+0=z\ \forall z\in\mathbb{C}$.
4) Ύπαρξη αντιθέτου. Έστω $z=a+bi\in\mathbb{C}$ με $a,b\in\mathbb{R}$. Τότε ορίζουμε $-z=(-a)+(-b)i\in\mathbb{C}$
$(-1)i$ κ' ισχύει $z+(-z)=(-z)+z=0\ \forall z\in\mathbb{C}$
(Ο $-z$ λέγεται ΑΝΤΙΘΕΤΟΣ του z στο $\mathbb{C}$)

Απόδειξη 1) Έστω $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, $z_3=a_3+b_3i$ με $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in\mathbb{R}$
Τότε $z_1+(z_2+z_3)=(a_1+b_1i)+((a_2+a_3)+(b_2+b_3)i)=(a_1+(a_2+a_3))+(b_1+(b_2+b_3))i=$
προσεταιριστικότητα πρόσθεσης στο $\mathbb{R}$ $=((a_1+a_2)+a_3)+((b_1+b_2)+b_3)i=[(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i]+(a_3+b_3i)=$
$=[(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)]+(a_3+b_3i)=(z_1+z_2)+z_3$

Πρόταση: Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Τότε: (i) $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(ii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Απόδειξη. Έστω $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ με $z_1 = a_1 + b_1 i$ κ' $z_2 = a_2 + b_2 i$

Τότε $\overline{(z_1+z_2)} = \overline{(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)} = \overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i} = (a_1+a_2)+(-b_1-b_2)i =$
$= (a_1+(-b_1)i) + (a_2+(-b_2)i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Επίσης $\overline{(z_1 z_2)} = \overline{(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i} = (a_1a_2-b_1b_2)+(-a_1b_2-a_2b_1)i$
κ' $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (a_1-b_1 i)(a_2-b_2 i) = (a_1a_2-(-b_1)(-b_2)) + (-b_1a_2-a_1b_2)i$, άρα έχουμε ισότητα

Πόρισμα: Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Τότε $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
(Προσοχή, το αντίστοιχο για την πρόσθεση δεν ισχύει)

Απόδειξη $|z_1 z_2| = \sqrt{(z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)}} = \sqrt{z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2} = \sqrt{(z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2)} = \sqrt{z_1 \bar{z}_1}\sqrt{z_2 \bar{z}_2} = |z_1||z_2|$

Πόρισμα: Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$. Τότε $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$

Απόδειξη $z \cdot z^{-1} = 1 \Rightarrow |z z^{-1}| = |1| = 1 \overset{\text{πρόταση}}{\Rightarrow} |z||z^{-1}| = 1 \Rightarrow |z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$